Μάθημα 20ο $\qquad\qquad$ 16/12/16

**ΘΕΩΡΗΜΑ Rodrigues**: Έστω $c: I \to S$ κανονική καμπύλη. Η $c$ είναι γραμμή καμπυλότητας και μόνο υπάρχει συνάρτηση $\lambda: I \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $(N \circ c)'(t) = \lambda(t)\, c'(t)$, όπου $N: S \to S^2$ είναι η απεικόνιση Gauss.

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ**: Η $c$ είναι γραμμή καμπυλότητας <u>ανν</u> $\forall t \in I$, $c'(t)$ είναι κύρια διεύθυνση, δηλαδή ιδιοδιάνυσμα της απεικόνισης Weingarten $L_{c(t)}$ $\Leftrightarrow$

$\Rightarrow L_{c(t)}(c'(t)) = \mu(t)c'(t), \quad \mu: I \to \mathbb{R}$
$\Leftrightarrow -dN_{c(t)}(c'(t)) = \mu(t)c'(t) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow -(N \circ c)'(t) = \mu(t)c'(t) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (N\circ c)'(t) = \lambda(t)c'(t), \quad \lambda = -\mu.$

## Τρίτη θεμελιώδης μορφή

**ΟΡΙΣΜΟΣ**: Έστω $S$ κανονική επιφάνεια με απεικόνιση Gauss $N: S \to S^2$. Η τρίτη θεμελιώδης μορφή $III_p$ της $S$ στο $p$ είναι η τετραγωνική μορφή $III_p: T_pS \to \mathbb{R}$
$III_p(w) = \langle L_p w, L_p w\rangle = \|L_p w\|^2 \geq 0.$

$I_p, II_p: T_pS \to \mathbb{R}$ $\qquad I_p \sim \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}, \quad X: U \to S$

$I_p(w) = \langle w, w\rangle_p = \|w\|^2$ $\qquad II_p \sim \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}$

$II_p(w) = \langle L_p w, L_p w\rangle$

$III_p(w) = \langle L_p^2 w, w\rangle, \quad L_p^2 = L_p \circ L_p$

$L_p = -dN_p \Rightarrow III_p(w) = \langle dN_p(w), dN_p(w)\rangle = \|dN_p(w)\|^2$

Ο πίνακας της $III_p$ ως προς τη βάση $\{X_u, X_v\}$

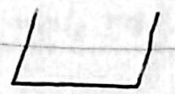
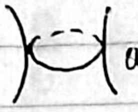
$III_p \sim \begin{pmatrix} \|N_u\|^2 & \langle N_u, N_v\rangle \\ \langle N_u, N_v\rangle & \|N_v\| \end{pmatrix}$ $\qquad dN(X_u) = N_u$, $dN(X_v) = N_v$

**ΘΕΩΡΗΜΑ**: Για κάθε σημείο $p \in S$ ισχύει $III_p - 2H(p)II_p + K(p)I_p = 0$

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ**: Από το Θεώρημα Caley-Hamilton έχουμε $\chi_{L_p}(t) = t^2 - (trL_p)t + det$
$\chi_{L_p}(L_p) = 0 \Leftrightarrow L_p^2 - (tr L_p)L_p + det(L_p)Id = 0.$
$\forall w \in T_pS: L_p^2 w - 2H(p)L_p w + K(p)w = 0.$

## Ελαχιστικές επιφάνειες

**ΟΡΙΣΜΟΣ**: Μια επιφάνεια καλείται **ελαχιστική** <u>αν</u> έχει μέση καμπυλότητα $H=0$.

Π.Χ.   αλυσοειδής  ελικοειδής

$w \in T_pS - \{0\}$

$\mathrm{III}_p + K(p) I_p = 0 \Rightarrow \underbrace{\mathrm{III}_p(w)}_{\geq 0} = -K(p) \underbrace{I_p(w)}_{>0}$

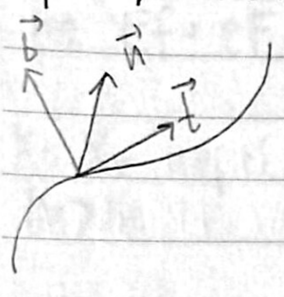
**ΠΟΡΙΣΜΑ**: Κάθε ελαχιστική επιφάνεια έχει καμπυλότητα Gauss $K \leq 0$ παντού.

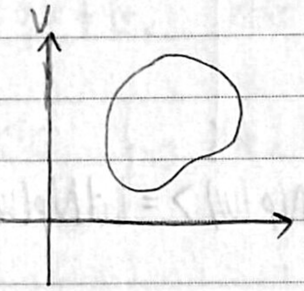
$K = K_1 K_2$, $H = \frac{1}{2}(K_1 + K_2)$

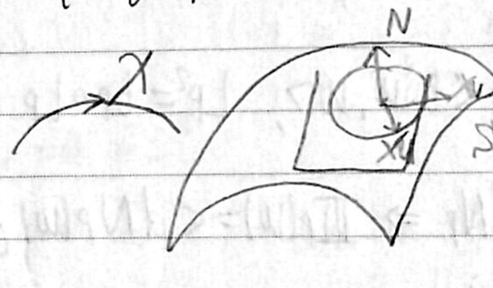
$H = 0 \Leftrightarrow K_1 + K_2 = \cdots \Rightarrow K = -K_1^2 \leq 0$

**ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ**: Τα σημεία κάθε ελαχιστικής επιφάνειας είναι είτε υπερβολικά είτε ισόπεδα.

**Πρόβλημα**: Από τι καθορίζεται μια επιφάνεια (ως προς γεωμ. ισοτιμία).




Έστω $X: U \to S$ σύστημα συντεταγμένων, τότε $\{X_u, X_v\}$ βάση του $T_pS$. $N \circ X = \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|}$

$\{X_u, X_v, N\}$ βάση του $\mathbb{R}^3$.

$$\left.\begin{aligned} X_{uu} &= \Gamma_{11}^1 X_u + \Gamma_{11}^2 X_v + L_{11} N \\ X_{uv} &= \Gamma_{12}^1 X_u + \Gamma_{12}^2 X_v + L_{12} N \\ X_{vu} &= \Gamma_{21}^1 X_u + \Gamma_{21}^2 X_v + L_{21} N \\ X_{vv} &= \Gamma_{22}^1 X_u + \Gamma_{22}^2 X_v + L_{22} N \end{aligned}\right\} \text{Τύποι του Gauss}$$

$$\left.\begin{aligned} N_u &= b_{11} X_u + b_{21} X_v \\ N_v &= b_{12} X_u + b_{22} X_v \end{aligned}\right\} \text{Τύποι Weingarten}$$

Οι τύποι Gauss και Weingarten μαζί: σύστημα (Σ)

$\Gamma_{ij}^k : U \to \mathbb{R}$ καλούνται σύμβολα Christoffel ως προς το σύστημα συντεταγμένων $X$.

$L_{ij}: V \to \mathbb{R}$

$\langle X_{uu}, N\rangle = L_{11} \Rightarrow L_{11} = e$

$L_{12} = L_{21} = f, \quad L_{22} = g.$

$LX_u = a_{11}X_u + a_{21}X_v = -N_u \qquad (a_{ij}) = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} e & f \\ f & g\end{pmatrix}, \ (b_{ij}) = -(a_{ij})$

$LX_v = a_{12}X_u + a_{22}X_v = -N_v$

$N = \dfrac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|} = \dfrac{X_u \times X_v}{\sqrt{EG-F^2}}$

$X_{uv} = X_{vu} \Rightarrow \Gamma_{ij}^{\ k} = \Gamma_{ji}^{\ k}$ εξαρτώνται μόνο από την $I$

## Υπολογισμός των συμβόλων Christoffel

πολλαπλασιάζω εσωτερικά

$X_u: \ E\Gamma_{11}^{\ 1} + F\Gamma_{11}^{\ 2} = \langle X_{uu}, X_u\rangle = \frac{1}{2}(\langle X_u, X_u\rangle)_u = \frac{1}{2}E_u$

$X_v: \ F\Gamma_{11}^{\ 1} + G\Gamma_{11}^{\ 2} = \langle X_{uu}, X_v\rangle = (\langle X_u, X_v\rangle)_u - \langle X_u, X_{vu}\rangle = F_u - \frac{1}{2}(\langle X_u, X_u\rangle)_v =$

$= F_u - \frac{1}{2}E_v$

$\det\begin{pmatrix} E & F \\ F & G\end{pmatrix} = EG - F^2 > 0.$

**ΛΗΜΜΑ**: Τα σύμβολα Christoffel εξαρτώνται από τα $E, F, G$ και τις παραγώγους τους $1^{ης}$ τάξης, δηλαδή από την $I$.

Αν το $(S)$ έχει λύση πρέπει $\left.\begin{cases} (X_{uu})_v = (X_{uv})_u, & (X_{uv})_v = (X_{vv})_u \\ N_{uv} = N_{vu} \end{cases}\right\} \Leftrightarrow$

$(X_{uu})_v = (X_{uv})_u \Leftrightarrow (\Gamma_{11}^{\ 1}X_u + \Gamma_{11}^{\ 2}X_v + eN)_v = (\Gamma_{12}^{\ 1}X_u + \Gamma_{12}^{\ 2}X_v + fN)_u$

$A_iX_u + B_iX_v + C_iN = 0, \ i = \cdots$

$A_1X_u + B_1X_v + C_1N = 0.$

$B_1 = \Gamma_{11}^{\ 1}\Gamma_{12}^{\ 2} + \Gamma_{11}^{\ 2}\Gamma_{22}^{\ 2} + eb_{22} + (\Gamma_{11}^{\ 2})_v - \Gamma_{12}^{\ 1}\Gamma_{11}^{\ 2} - (\Gamma_{12}^{\ 1})^2 - fb_{21} - (\Gamma_{12}^{\ 1})_u$

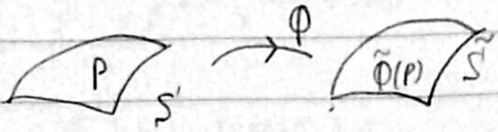
$B_1 = 0 \Leftrightarrow \underbrace{(\Gamma_{12}^{\ 1})_u - (\Gamma_{11}^{\ 2})_v + \Gamma_{12}^{\ 1}\Gamma_{21}^{\ 1} + (\Gamma_{12}^{\ 2})^2 - \Gamma_{11}^{\ 1}\Gamma_{12}^{\ 2} - \Gamma_{11}^{\ 2}\Gamma_{22}^{\ 2} = -E\cdot\frac{eg-f^2}{EG-F^2}}_{\text{Εξίσωση Gauss}} = -EK$

$b_{22} = \cdots$

$b_{21} = \cdots$

**Theurema Egregium** (Έξοχο Θεώρημα): Η καμπυλότητα Gauss εξαρτάται μόνο από τη $1^η$ Θεμελιώδη μορφή.

**ΠΟΡΙΣΜΑ**: Εστω $\varphi: S \to \tilde{S}$ ισομετρία (τοπική). Τότε ισχύει: $K(P) = \tilde{K}(\varphi(P))$



Εξισώσεις Mainardi-Codazzi: $e_v - f_u = e\Gamma_{12}^1 + f(\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) - g\Gamma_{11}^2$

$$f_v - g_u = e\Gamma_{12}^1 + f(\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1) - g\Gamma_{22}^2$$

**ΘΕΩΡΗΜΑ** Bonnet (Θεμελιώδες θεώρημα της θεωρίας των επιφανειών): Εστω $E, F, G, e, f, g$ $V \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ οι οποίες πληρούν:

i) $E > 0$, $G > 0$, $EG - F^2 > 0$

ii) τις εξισώσεις Gauss και Mainardi-Codazzi

Τότε για $p_0 \in V$ υπάρχει περιοχή του $U \subseteq V$ και απεικόνιση $X: U \to \mathbb{R}^3$ τέτοια ώστε $X(U)$ να είναι κανονική επιφάνεια με θεμελιώδη ποσά 1ης και 2ης τάξης τις δοθείσες συναρτήσεις $E, F, G, e, f, g$.

Αν $\tilde{X}: U \to \mathbb{R}^3$ είναι μια άλλη λύση του συστήματος, τότε $\tilde{X}(U)$, $X(U)$ είναι γεωμετρικώς ισότιμες.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ**: Υπάρχει κανονική επιφάνεια με $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ και $\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^u & 0 \\ 0 & e^v \end{pmatrix}$;

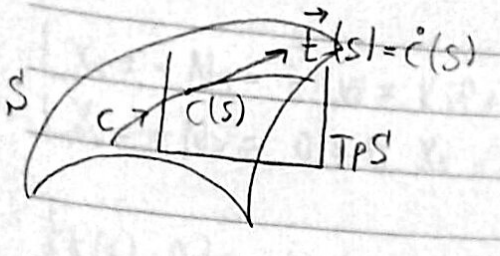
Αν υπήρχε τέτοια επιφάνεια θα ήταν ισομετρική με κάποιο επίπεδο (έχει καμπυλότητα Gauss $K=0$).

Από το έξοχο θεώρημα η επιφάνεια έχει $K=0$.

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} - e^u e^v < 0$$

Άτοπο, δεν υπάρχει τέτοια επιφάνεια.

**Πρόβλημα**: Εστω $S$ επιφάνεια με καμπυλότητα Gauss $K=0$ παντού. Είναι η $S$ τοπικά ισομετρική με το επίπεδο.



$p \in S$ , $w \in T_pS - \{0\}$

$k_n(w) = \dfrac{II_p(w)}{I_p(w)}$

Εστω $c: I \to S$ καμπύλη με παράμετρο το μήκος τόξου, τότε $k_n(\dot{c}(s)) = \dfrac{II_{c(s)}(\dot{c}(s))}{I_{c(s)}(\dot{c}(s))}$

$= II_{c(s)}(\dot{c}(s)) = -\langle dN_{c(s)}(\dot{c}(s)), \dot{c}(s) \rangle = -\langle (N \circ c)^{\cdot}(s), \dot{c}(s) \rangle =$

$= -\dfrac{d}{ds} \langle (N \circ c)(s), \dot{c}(s) \rangle + \langle N \circ c(s), \ddot{c}(s) \rangle$

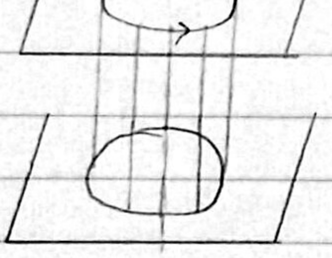
$k_n(\dot{c}(s)) = \langle N \circ c(s), \ddot{c}(s) \rangle$

ΠΡΟΤΑΣΗ: Αν $c: I \to S$ είναι ευθεία, τότε είναι ασυμπτωτική καμπύλη της $S$

Ευθειογενείς επιφάνειες

ΟΡΙΣΜΟΣ: Μια επιφάνεια $S$ καλείται ευθειογενής αν από κάθε σημείο διέρχεται ευθεία (ή ευθύγραμμο τμήμα) που περιέχεται στην $S$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ:



$x^2 + y^2 - z^2 = 1 \iff (x - z)(x + z) = (1 - y)(1 + y)$

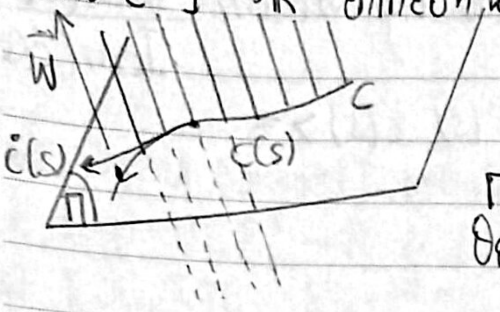
$(\varepsilon_1): \begin{cases} x - z = a(1 - y) \\ x + z = 1/a\,(1 + y) \end{cases}$ , $(\varepsilon_2): \begin{cases} x - z = b(1 + y) \\ x + z = 1/b\,(1 - y) \end{cases}$

ΠΟΡΙΣΜΑ: Κάθε ευθειογενής επιφάνεια έχει καμπυλότητα Gauss $K \leq 0$.

3 κλάσεις ευθειογενών επιφανειών

## ① Κυλινδρικές επιφάνειες

Έστω $c: I \to \mathbb{R}^3$ επίπεδη καμπύλη με παράμετρο το μήκος τόξου $s$




Έστω μοναδιαίο διάνυσμα $\vec{w}$ κάθετο στο επίπεδο Π της c.

Θεωρώ την παραμετρική επιφάνεια $X: I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$

$X(s, v) = c(s) + vw$. Αυτή καλείται κυλινδρική επιφάνεια με οδηγό καμπύλη της c και γενέτειρες // w. Η X είναι λεία με $X_s(s, v) = \dot{c}(s) = \vec{t}(s)$, $X_v(s, v) = w$

$X_s \times X_v = \vec{t}(s) \times w$, $\|X_s \times X_v\| = \|\vec{t}(s) \times w\| = \|\vec{t}(s)\| \, \|\vec{w}\| \sin\sphericalangle(\vec{t}(s), \vec{w}) = 1 \neq 0 \Rightarrow$ X κανονική

### 1η Θεμελιώδης μορφή

$$\left.\begin{aligned} E &= \|X_s\|^2 = \|\vec{t}\|^2 = 1 \\ F &= \langle X_s, X_v \rangle = \langle \vec{t}, w \rangle = 0 \\ G &= \langle X_v, X_v \rangle = \|w\|^2 = 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{τοπικά ισομετρική με το επίπεδο} \xrightarrow[\text{θεώρημα}]{\text{έξοχο}} K = 0 \text{ παντού.}$$

### 2η Θεμελιώδης μορφή

$e = \langle X_{ss}, N \rangle = \langle \dot{\vec{t}}(s), \vec{t}(s) \times w \rangle = \langle \kappa(s) \vec{n}(s), \vec{t}(s) \times w \rangle = \kappa(s) \langle \vec{n}(s), \vec{t}(s) \times w \rangle$ *

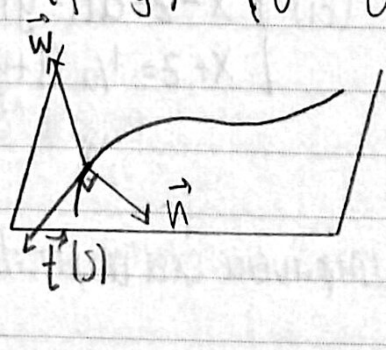
$f = \langle X_{sv}, N \rangle = 0$

$g = \langle X_{vv}, N \rangle = 0$

$$\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$N = \dfrac{X_s \times X_v}{\|X_s \times X_v\|} = \vec{t} \times w$

$N(s, v) = \vec{t}(s) \times w$




Το $X(s, v)$ είναι παραβολικό $\Leftrightarrow \kappa(s) \neq 0$

Το $X(s, v)$ είναι ισόπεδο $\Leftrightarrow \kappa(s) = 0$.

$LX_s = -N_s = \vec{t}' \times W = K\vec{n}' \times \vec{w}' = K\vec{t} = KX_s$
$LX_v = -N_v = 0 = 0 \cdot X_v$

$\{K(s), 0\}_{max} = K_1(s,v)$ , $K_2(s,v) = \min\{K(s), 0\}$

② Έστω $C: J \to \mathbb{R}^3$ καμπύλη με παράμετρο το μήκος τόξου $s \in J$ και ορίζω την παραμετρική επιφάνεια $X: J \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$.

$X(s,v) = c(s) + vW(s)$ όπου $W: J \to \mathbb{R}^3$ είναι $W(s) = ac(s) + P_0 \neq 0$, $a \in \mathbb{R}^*$, $P_0 \in \mathbb{R}^3$.
(κωνικές επιφάνειες)

$X_s(s,v) = \dot{c}(s) + v\dot{w}(s) = \vec{t}(s) + va\vec{t}(s) \Rightarrow$
$X_s = (1 + va)\vec{t}(s)$

$X_v = W(s) = ac(s) + P_0$.

Είναι φανερό ότι σημεία όπου $v = -\frac{1}{a}$, η $X$ δεν είναι κανονική

$X(s, -\frac{1}{a}) = c(s) - \frac{1}{a} W(s) = c(s) - \frac{1}{a}(ac(s) + P_0) = -\frac{1}{a} P_0$